PS2315 : "Sistemas".
Univ. Simón Bolívar.
Dpto de Procesos y Sistemas.
Prof. José Ferrer.

Trimestre Sep-Dic 2011

Fecha de Entrega : Martes 25 de Oct.

Tarea #5.

Problema 1: Un sistema S, lineal, invariante y de tiempo discreto está representado en variables de estados por

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]_{x}^{n} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{x(k)}^{2}$$

a) Determine la trayectoria de estado homogenea o transitoria

$$x_h(k) = \Psi(k, 0, x_0, 0).$$

si $\quad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Determine la respuesta del sistema

$$y(k) = \eta(k, 0, x_0, u_{[0,k)}) \; ; \; k \geq 0$$

cuando $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $u(k) = 3^k$ para $k \geq 0$.

c) Encuentre una ecuación de diferencias

$$D(\sigma)\, y(k) = N(\sigma)\, u(k) \quad \text{con } D, N \in \mathbb{R}[\sigma].$$

d) Determine los polos y ceros de la representación en v.e's. $S\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^2$

e) Determine el operador de pulso $\hat{h}(\sigma)$ del sistema, sus polos y ceros. (compare) con los obtenidos en (d).

Problema 2: Considere dos sistemas S_i

$$u^{i}(t) \longrightarrow \boxed{S\left[\begin{array}{c|c} A^{(i)} & B^{(i)} \\ \hline C^{(i)} & D^{(i)} \end{array}\right]_{x^{(i)}}^{n_i}} \longrightarrow y^{(i)}(t) \qquad t \in T(-\infty, +\infty).$$

donde los sistemas están descritos por las siguientes representaciones en variables de estados.

$$S^1: \begin{cases} \dfrac{dx^{(1)}}{dt} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(1)}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(1)}(t) \\ y^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(1)}(t) \qquad \text{con} \quad x^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

mientras que

$$S^2: \begin{cases} \dfrac{dx^{(2)}}{dt} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(2)}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^{(2)}(t) \\ y^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} x^{(2)}(t) \qquad \text{con} \quad x^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

a) Determine para cada sistema S^i, $i=1,2$:

$$\text{espec}(S^i) \quad y \quad \text{ceros}(S^i).$$

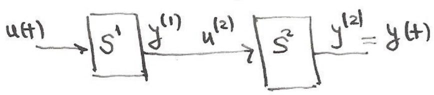
b) Demuestre que si

$$u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t) = 0$$

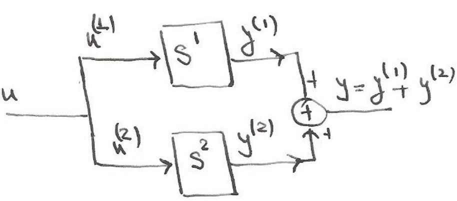
entonces

$$y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t) \; ; \quad \forall t \geq 0.$$

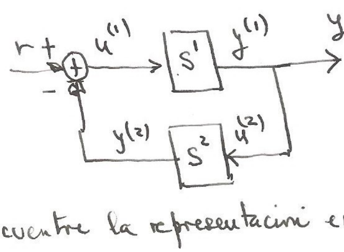
c) Para cada una de las siguientes interconexiones



(Conexión serie)



(Conexión paralelo)



(Conexión en retroalimentación).

encuentre la representación en variables de estado total o integral.

Problema 3: Considere un sistema lineal S descrito por

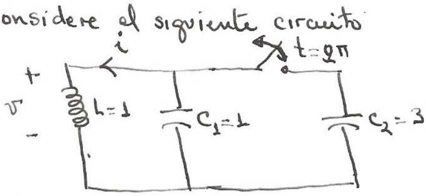
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

a) Demuestre que la matriz transición de estados de S es-

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \frac{1}{b}\sin(bt) \\ -b\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

b) Considere el siguiente circuito



inicialmente el interruptor, en $t=0$, está cerrado y $v(0) = -1$, $i(0) = 1$. En $t = 2\pi$, el interruptor se abre..

Empleando (a); determine el valor del voltaje $v(t)$ en $t = \frac{5}{2}\pi$.

Problema 4: Sea S un sistema LTI de tiempo continuo

$$u(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y(t) \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Sobre este sistema se conoce

$$\psi(t,0,x_0^{(1)},0) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad y \quad \psi(t,0,x_0^{(2)},0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t} \\ \frac{3}{4}(e^{-t} - e^{-5t}) \end{bmatrix} \qquad t \geq 0$$

a) Encuentre los estados iniciales $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in \mathbb{R}^2$

b) Determine la matriz transición de estados $\Phi(t) = e^{At}$; $t \geq 0$.

c) Encuentre la matriz A del sistema.

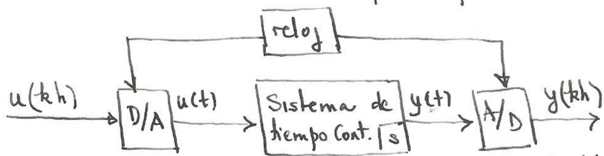
Problema 5: Sea S el sistema descrito por

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad ; \quad y(t) = x_2(t)$$

a) Encuentre la matriz transición de estados. $\Phi(t) = e^{At}$; $t \geq 0$

b) Determine el valor de la salida en $t=2$., $y(2)$ si se aplica $u(t) = 2\Pi\left(\frac{t-1/2}{1}\right)$ y $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 6: En los sistemas controlados por computadora es frecuente encontrar



Conversor Digital-Analógico Conversor Analógico/Digital

donde el conversor D/A se implementa mediante un ZOH y el conversor A/D mediante un muestreador ideal con período de muestreo $h>0$..

Suponga que el sistema S de tiempo continuo está descrito por

$$S: \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t). \end{cases}$$

donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = 0$.

a) Determine los polos y ceros de la representación en v.e. del sistema S.

b) Encuentre la representación en v.e's del sistema muestreado (ZOH + muestreo)

$$S^h_{disc} \begin{cases} x[(k+1)h] = \Phi\, x(kh) + \Gamma u(kh). \\ y(kh) = C\,x(kh) + D u(kh) \end{cases}$$

correspondiente o visto por el computador.

c) Encuentre los polos y ceros del sistema muestreado $S^h_{disc} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ C & D \end{bmatrix}_x$

d) Puede establecer Ud una relación entre

i) espec(S) y espec(S^h_{disc})

ii) ceros(S) y ceros(S^h_{disc}).

///

¡Suerte!